

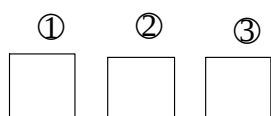
樹形図, 順列, 階乗, 重複組合せ, 多項定理, 組合せ

1. 樹形図から順列 ${}_nP_r$ へ

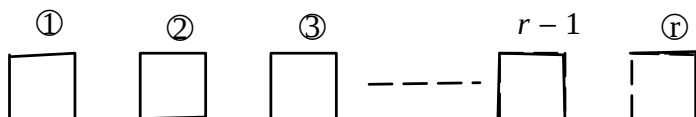
(1) 3 文字 a, b, c から 2 文字にとって並べる並べ方は何通りあるか求めよ.

(2) 4 文字 a, b, c, d から 2 文字にとって並べる並べ方は何通りあるか求めよ.

(3) 5 文字 a, b, c, d, e から 3 文字にとって並べる並べ方は何通りあるか求めよ.



(4) n 文字 $a_1, a_2, \dots, a_n$ から r 文字にとって並べる並べ方は何通りあるか求めよ.



$${}_nP_r = \cdot (\quad) \cdot (\quad) \cdots (\quad) \cdot (\quad)$$

(5) ${}_{10}P_3$, ${}_{15}P_2$, ${}_8P_4$, ${}_{12}P_3$ を求めよ.

2. 階乗 $r!$ から多項定理へ (1)

異なる n 個から r 個にとって並べる並べ方は

$${}_nP_r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-r+2) \cdot (n-r+1) \text{ 通り}$$

において, $n=r$ とおくと, 異なる r 個から r 個にとって並べる並べ方は

${}_rP_r = r(r-1)(r-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ となる.

‘これを r の階乗とよび, $r!$ であらわす.

$$\text{異なる } r \text{ 個の並べ方は } r! = r(r-1)(r-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ 通り}$$

(1) $1!, 2!, 3!, 4!, 5!$ の値を求めよ.

(2) a, a, b の並べ方何通りか求めよ.

(3) a, a, a, b の並べ方何通りか求めよ.

3. 階乗 $r!$ から多項定理へ (2)

(1) a, a, a, b, b の並べ方何通りか求めよ.

(2) a 個の $A, A, \dots, A$ b 個の $B, B, \dots, B$ c 個の $C, C, \dots, C$
 d 個の $D, D, \dots, D$ の並べ方は
 $\frac{(a+b+c+d)!}{a!b!c!d!}$ 通りある

(3) $a, a, a, a, b, b, b, c, c, d$ の並べ方何通りか求めよ.

(4) a, a, b, b, c, c の並べ方何通りか求めよ.

(5) $\alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta, \gamma$ の並べ方何通りか求めよ.

(6) $1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4$ の並べ方何通りか求めよ.

4. 階乗 $r!$ から多項定理へ (3)

$$(1) (x+y)^3 = \overbrace{(x+y)}^{①} \overbrace{(x+y)}^{②} \overbrace{(x+y)}^{③} \text{ を展開し整理したときの } x^2y \text{ の係数を求めよ.}$$

$$(2) (x+y)^4 = \overbrace{(x+y)}^{①} \overbrace{(x+y)}^{②} \overbrace{(x+y)}^{③} \overbrace{(x+y)}^{④}$$

を展開し整理したときの x^3y の係数を求めよ.

$$(3) (x+y)^5 = \overbrace{(x+y)}^{①} \overbrace{(x+y)}^{②} \overbrace{(x+y)}^{③} \overbrace{(x+y)}^{④} \overbrace{(x+y)}^{⑤}$$

を展開し整理したときの x^3y^2 の係数を求めよ.

$$(4) (x+y+z+w)^{10} = \overbrace{(x+y+z+w)}^{①} \overbrace{(x+y+z+w)}^{②} \overbrace{(x+y+z+w)}^{③} \cdots \overbrace{(x+y)}^{⑩}$$

を展開し整理したときの $x^4y^3z^2w$ の係数を求めよ.

$$(5) (A+B+C+D)^n = \overbrace{(A+B+C+D)}^{①} \overbrace{(A+B+C+D)}^{②} \overbrace{(A+B+C+D)}^{③} \cdots \overbrace{(A+B+C+D)}^{⑩}$$

を展開し整理したときの一般項は

$$\frac{(a+b+c+d)!}{a!b!c!d!} A^a B^b C^c D^d$$

ただし, $n = a + b + c + d$

$$(6) (x+2y+3z)^5 \text{ を展開して整理した後の } xy^2z^2 \text{ の係数を求めよ.}$$

$$(7) (x-y-z-w)^5 \text{ を展開して整理した後の } xyz^2w \text{ の係数を求めよ.}$$

$$(8) (x^2+y-3)^4 \text{ を展開して整理した後の } x^4y \text{ の係数を求めよ.}$$

5. 階乗 $r!$ から重複組合せへ (1)

(1) $x + y = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ を満たす整数の組 (x, y) は何組あるか求めよ.

(2) $x + y + z = 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ を満たす整数の組 (x, y) は何組あるか求めよ.

(3) $x + y + z + w = 5$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $w \geq 0$
をみたす整数の組 (x, y, z, w) は何組あるか求めよ.

6. 階乗 $r!$ から重複組合せへ (2)

- (1) 柿, 梨, りんご, 桃, 杏が十分な数量がある. この果物の中から
4 つ取り出して果物かごを作る. 何種類の果物かごができるか.

- (2) $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $\cdots$ $x_n \geq 0$
を満たす整数の組 $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ は何組か求めよ.
$$\frac{\{r + (n - 1)\}!}{r!(n - 1)!}$$

- (3) 柿, 梨, りんご, 桃, 杏が十分な個数がある. この果物の中から 8 つ取り出して,
8 個入りの果物かごを作る. 何種類の果物かごができるか.
ただし 5 種類の果物について 少なくとも 1 つは入っているものとする.

7. 順列 ${}_nP_r$ と階乗 $r!$ から組合せ ${}_nC_r$ へ

(1) 異なる n 個のものから r 個にとって並べる並べ方は ${}_nP_r$ 通り

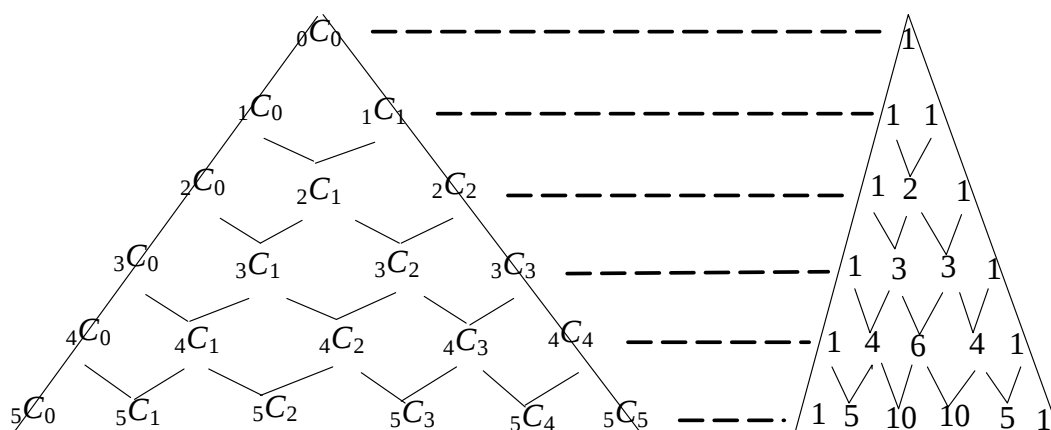
異なる r 個の並べ方は $r!$ 通り

異なる n 個のものから r 個のとり方は ${}_nC_r$ 通り

$${}_nP_r = {}_nC_r \times r! \quad \text{両辺を } r! \text{ で割ると}$$

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

パスカルの三角形



パスカルの三角形の左右対称 : ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

パスカルの三角形の生成 : ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$

(2) ${}_6C_4$ の値を求めよ

(3) ${}_{10}C_7$ の値を求めよ.

(4) ${}_{20}C_{18}$ の値を求めよ.

(5) ${}_{100}C_0$ の値を求めよ.